jofrye@web.de
49661 Cloppenburg
Germany

Cloppenburg, 14. April 2009

Algorithmus-Vorschlag für das 3-Färbungsproblem eines Graphen

Sehr geehrter Leser,

ich bin mir bewusst, dass das P vs. NP-Problem sehr schwierig ist und ich mir kaum Hoffnungen darauf machen kann, dieses Problem jemals zu knacken, doch bitte ich Sie diesen Algorithmus eine Chance zu geben.

Ich werde den Algorithmus kurz fassen, um ihre Zeit nicht zu sehr in Anspruch zu nehmen. Schrecken Sie bitte nicht vor dem Wort Clique zurück. Ich such hier nach Cliquen mit konstanter Größe im Algorithmus.

Für Kritik und Nachfragen bin ich gerne zu haben, senden Sie mir einfach eine E-Mail.

Mit freundlichen Grüßen,

J. Frye

Allgemeiner Algorithmus-Aufbau

G = (V,E) ist ein ungerichteter Graph

C-Speicher …. Cliquenspeicher
P(X)-Bank …. Jeder Punkt kriegt einen eigenen Speicher (seine Bank)
z …. die höchste Kantenanzahl an irgendeinem Punkt am Anfang
Werte .... mit Werte/Farbwerte werden die Farben bezeichnet

Algorithmus-Beginn

1. Schritt (Suche nach 3er-Cliquen)

Zum Finden von 3er-Cliquen wird das Backtracking-Verfahren eingesetzt oder andere bessere Verfahren. Die Cliquensuche ist für konstante Cliquen in polynomieller Zeit zu lösen.

Die gefundenen Cliquen im C-Speicher abgelegt.

Die Laufzeit für den ersten Schritt: O(V^3)

2. Schritt (Füllen der Banken)

Jede P-Bank wird mit den Punkten, die einen Abstand von 3 Kanten zum jeweiligen Punkt haben, gefüllt.
Dieser Schritt ist nötig, um später die neu entstehenden 3er-Cliquen zu finden.

Die Laufzeit für den zweiten Schritt: O(V*z^3)

Wir nehmen (den worst-case) an, jeder Punkt hätte die gleiche Kantenanzahl, damit keine Unterschätzung geschieht, wird die höchste Kantenanzahl (z) im Graphen gewählt. Diese wird hoch drei genommen, weil sich die Anzahl der Kanten pro Kante mal sich selbst genommen werden muss. Da dies für jeden Punkt geschehen muss, wird noch mit der Anzahl der Punkte multipliziert.

3. Schritt (Suche nach neu entstehenden 3er-Cliquen)

Teilschritt 1

Im C-Speicher überprüfen, ob 3er-Cliquen eine Kante gemeinsam haben.

Falls zwei 3er-Cliquen gefunden werden, die eine Kante gemeinsam haben, wird zu *Teilschritt 2* gewechselt. Danach werden die 2 übrigen Punkte und deren Banken verschmolzen.

Laufzeit Teilschritt 1: O((V^3*3)^2)

Wir nehmen an, die Suche nach den 3er-Cliquen hätte ergeben, dass jede Kombination eine 3er-Clique bildet, sodass wir nun alle Kombinationen kontrollieren müssen. Dazu muss jede Clique in ihre Kanten zerlegt werden. Bei 3er-Cliquen wären das 3 Kanten. Die Suche an sich verläuft dann quadratisch.

Teilschritt 2

Es muss vor dem Verschmelzen überprüft werden, ob eines der 2 Punkte in der Bank des anderen Punktes vorhanden ist.

Falls ja, ist eine neue 3er-Clique entstanden.
Die neue 3er-Clique wird dem C-Speicher hinzugefügt und *Teilschritt 1* wird weiterverfolgt.

Laufzeit Teilschritt 2: O((V*z^3)^2)

Wir nehmen an, dass jeder Punkt mit jeder Bank verglichen werden muss. Die Suche verläuft quadratisch.

Notiz: Selbst wenn der Vergleich kein positives Ergebnis liefert, wird immer noch verschmolzen.

Letzter Schritt (Überprüfung auf 3-Färbbarkeit)

Es wird ein ähnlicher Algorithmus wie am Anfang gestartet, nur mit dem Unterschied, dass nun nach Kanten gesucht wird, die zum selben Punkt zurückführen (R-Kanten).

Falls solche Kanten gefunden werden, ist der Graph nicht 3-färbbar.

Laufzeit: (V^2)

Notiz: Es können schon anfangs solche R-Kanten existieren, diese Kanten machen dann jede Färbung an sich schon widersprüchlich/unerfüllbar, was zwar auch eine 3-Färbung einschließt und darum egal sein sollte, da die R-Kante so oder so später gefunden wird. Notfalls könnte man aber vorab eine Suche nach solchen Kanten (Laufzeit auch V^2) durchführen.

Unnatürliche R-Kanten entstehen beim Abarbeiten des Algorithmus, wenn der Graph verlangt, dass ein Punkt nicht mit der eigenen Farbe gefärbt werden darf (s.u. „2 u. 3. Methode“).

Algorithmus-Stopp

Allgemeine Erläuterung

Beim 3-Färbungsproblem gibt es nur zwei Bedingungen:
- Man darf nur 3 Farben benutzen.
- Eine Kante schränkt die Möglichkeiten ein, indem sie verlangt, dass zwei durch eine Kante verbundene Punkte zwei verschiedene Farben erhalten muss.

Der zweite Punkt gibt eine Informationen über das Färbungsproblem und dessen Algorithmus her.

-Kanten wirken reduzierend/negativierend bezogen auf die Möglichkeiten, die ein Punkt als Farbwert haben kann. Das Kanten nicht erweiternd wirken, hat große Bedeutung, da es den Anfangszustand der Aufgabe verdeutlicht. (Dafür gibt es später einen gesonderten Abschnitt).

-Durch Kanten können keine Farbwerte direkt gegeben werden, wie „Kante 1 weist die Farbe gelb und Kante 2 die Farbe rot zu".

-Es können nur Meta-Farbwerte weitergegeben werden, wie
- „der Wert auf diesen Punkt X muss auch auf diesen Punkt Y sein".
- „der Wert auf diesen Punkt X darf nicht auf diesen Punkt Y sein".

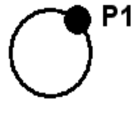
-Es gibt nur eine Weise die Färbung unerfüllbar zu machen (, sie äußert sich aber in mehreren Methoden):
- Eine Kante verbindet zwei gleichfarbige Punkte.
-(oder anders ausgedrückt: Ein Punkt wird soweit reduziert bis er keine Farbe mehr haben darf.)
-(oder noch anders ausgedrückt: Auf einem Punkt dürfen keine 3 Farben liegen.)

-Kanten wirken nur auf die Punkte mit denen sie verbunden.

Die Methoden für einen Widerspruch:

Die erste Methode ist die leichteste von allen.
Eine Kante macht einen Bogen und verbindet den Punkt mit sich selbst.
Da die Kante den Färbungsmöglichkeiten des Punktes so einschränkt, dass er nicht mit der eigenen Farbe gefärbt werden darf
Es entsteht ein Widerspruch.

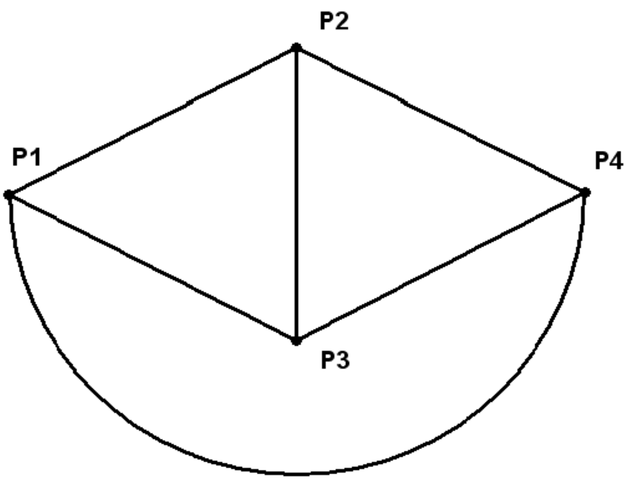
In diesem Fall wäre die Anzahl der Farben mit denen der Graph färbbar ist, gleich 0.



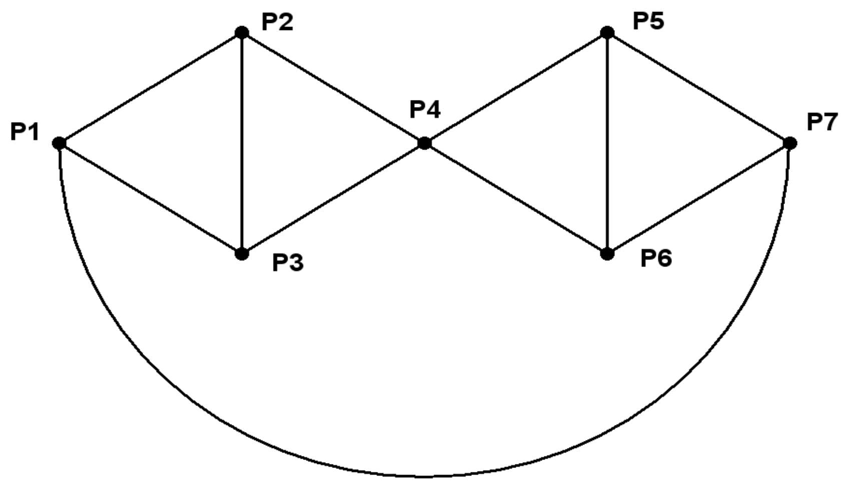
Die zweite Methode ist das Weitergeben von Farbwerten. Dazu schlägt man von einem Punkt zwei Kanten zu zwei weiteren Punkten, die auch miteinander verbunden sind. Man erhält eine 3er-Clique. Dadurch stellt man (hier beim 3-Färbungsproblem) sicher, dass ein weiterer Punkt, der mit zwei Punkten dieser Clique verbunden ist, den gleichen Farbwert hat wie der Punkt der Clique mit der es nicht verbunden ist.
Zum Schluss verbindet man zwei solcher gleichfarbigen Punkte durch eine Kante und erhält somit einen Widerspruch.

Die untere Abbildung zeigt dies. P1 ist mit P2 und P3 verbunden, da diese Punkte jeweils auch untereinander verbunden sind, müssen P2 und P3 zwei verschiedene Farbwerte haben.

Somit hat P4 automatisch den gleichen Farbwert wie P1. Die Kante zwischen P1 und P4 ist dann wie eine Kante, die einen Bogen macht und zu sich selbst zurückführt. Was das bedeutet wissen Sie schon.

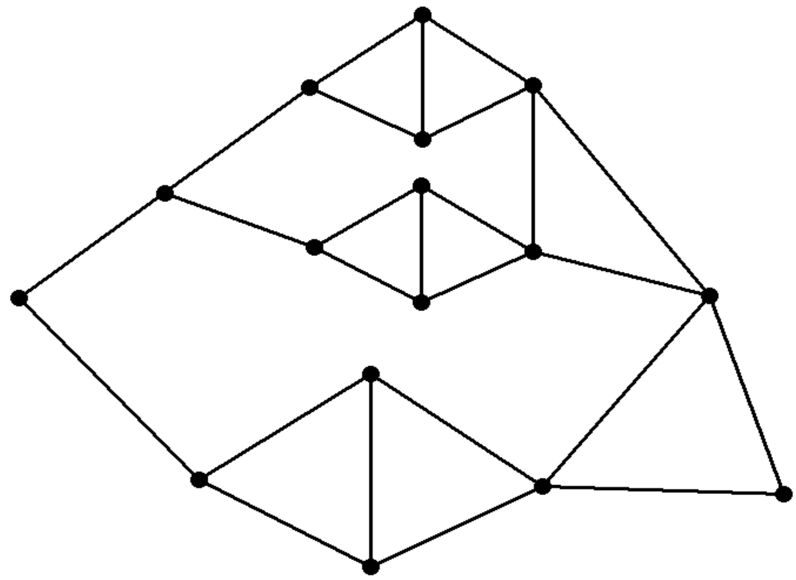


Die dritte Methode ist den Farbwert mehr als nur einmal weiterzugeben. Die Methode ist eine Erweiterung der 2.Methode.



Der nächste Abschnitt gehört noch zu den Methoden.

Beim Weitergeben von Farbwerten können neue Cliquen entstehen.
Dies hat man vielleicht schon erkannt als bei Methode 2 die „Pseudo-R-Kante“ betrachtet wurde.
Wenn ein Farbwert weitergegeben wird, ist das so „als ob“ Punkte mit gleichen Farbwert miteinander verschmelzen.
Alle Kanten die auf dem einen Punkt liegen, liegen dann auch auf dem anderen gleichfarbigen Punkt. Die neuen Cliquen sind dann gleichberechtigt wir die normalen Cliquen.



Dies sollte man im Hinterkopf behalten, da die neuen Cliquen auch Farbwerte weitergeben können. Der Algorithmus legt darum für jeden Punkt eine eigene „Bank“ an, um feststellen zu können, ob eine neue 3er-Clique entstanden ist.

Kanten wirken reduzierend

Diese Eigenschaft ist wichtig, um zu verstehen, warum der Algorithmus anfangs nur nach den 3er-Cliquen sucht.

Die Eigenschaft lässt den „Ur-Zustand“ des Graphen erkennbar werden:

-Alle Punkte sind ohne Kanten mit allen Farben färbbar.

Das Problem überlasst uns Entscheidungen von denen wir anfangs nicht wissen können, ob sie wahr oder falsch sind. Aber damit der Graph mit mindestens 4 Farben gefärbt werden muss, wird der Graph “selbst“ die Möglichkeiten, die es uns zu Färbung anbietet, einschränken, sodass man im Endeffekt nur falsche Entscheidungen treffen kann.
Würde der Graph nicht einschränken, so wäre jede Entscheidung eine richtige Entscheidung.

„Solange die Kanten den falschen Weg nicht erzwingen, dann gibt es mindestens einen richtigen Lösungsweg.“

Wir brauchen also nur nach den „3 Methoden wie man einen Widerspruch erzeugt“ zu suchen. Wenn wir nichts finden ist der Graph 3-färbbar.

Gibt es nur diese eine Möglichkeit mit zwei 3er-Cliquen, die eine gemeinsame Kante haben, Farbwerte weiterzugeben?

Stellen euch folgende Anfangssituation vor:

Man hat 2 Punkte und will, dass die beiden Punkte den gleichen Wert besitzen. Für jeden dieser Punkte gibt es 3 Möglichkeiten einer Färbung.
Dazu hat man die Möglichkeit Kanten zu bilden und neue Punkte zu schaffen.

Kanten können aber nur die Möglichkeiten einer Färbung reduzieren, also müsste man, wenn man zwei Punkten den gleichen Wert geben will, bei beiden Punkten auch das gleiche abziehen. Man muss hierbei beachten, dass man noch keine Punkte hat, die den gleichen Wert haben. Und man immer zwei verschiedene Werte abziehen muss, damit der Punkt nur eine Möglichkeit für eine Farbwahl hat.

Also fügt man erstmal 2 Punkte hinzu, da man 2 Werte abziehen muss. Da anfangs keine Punkte mit gleichen Farbwert existieren, muss man die zwei Anfangspunkte auch mit den beiden neuen Punkten verbinden, um sicherzustellen, dass auch wirklich das gleiche bei den Anfangspunkten abgezogen wird.
Außerdem müssen die beiden neuen Punkte verschiedene Werte haben, was man durch eine direkte Kante zwischen den beiden neuen Punkten erreicht.

Sowas hat immer zwei 3er-Cliquen, die eine Kante gemeinsam haben, als Folge.

Wichitg ist noch zu beachten, dass meim Weitergeben von Farbwerten neue Cliquen entstehen können. Die neuen Cliquen sind dann gleichberechtigt wir die normalen Cliquen.

Was ist nun, wenn es mehrere Punkte mit gleichen Wert gibt?

Diese Punkte können anfangs nur durch normale 3er-Cliquen entstanden sein. Es ist die Technik wie in Methode „4“ (das Entstehen neuer 3er-Cliquen) beschrieben. Für diese Methode gelten aber trotzdem die gleichen Bedingungen wie für normale Cliquen, sodass eigentlich keine neue Weitergabetechnik entsteht. Die Cliquen müssen zwar nicht mehr schon am Anfang direkt einsehbar sein, doch wenn man alle Kanten der Punkte mit gleichen Farbwert zusammenlegt, dann hat man wieder normale 3er-Cliquen.

Nachwort

Danke für Ihr Verständnis und die Tatsache, dass Sie sich meinen Algorithmus angeschaut haben.

Der Algorithmus ist „grob“ , aber ich wollte den Algorithmus lieber grob und leicht einsehbar als sauber, aber dafür ungleich länger haben. Es gibt bestimmt einige von Ihnen, die bessere Suchalgorithmen für die einzelnen Schritte kennen, aber ich denke, dass er in dieser Form für den Beweis ausreicht.

Grafiken und Quellen werden nachgereicht, wenn Sie sie solche zwecks einer besseren Übersichtlichkeit verlangen.

Von 3-Färbungsproblem zum Färbungsproblem allgemein

Um von 3-Färbungsproblem zum k-Färbungsproblem zu kommen, muss man die Cliquensuche auf k erhöhen und z^k nehmen. Es scheint mir logisch so, doch ich bin mir da noch etwas unsicher.